GEOMETRIE MIT WINKELPLÄTTCHEN

Heinrich Besuden

Kallmeyer

Inhalt

Vorbemerkung

Liebe Lehrkräfte oder Eltern,
lassen Sie sich nicht vorweg zu ausführlich und ermüdend informieren, ohne mit den Winkelplättchen selbst spielerisch umgegangen zu sein. Beginnen Sie genau wie die Kinder zunächst damit, sich durch erfinderisches Legen auf dem Tisch mit den Plättchen vertraut zu machen. Sie kommen von selbst darauf, dass man das Material lückenlos zu schönen Mustern zusammenfügen kann. Erfinden Sie Bandornamente oder Parkette. Sie können auch die Figuren von der Titelseite nachlegen. Das wird Ihnen Spaß machen.
Aber das soll Geometrie sein? – Sie werden sehen!

Das Material
Die Winkelplättchen werden nach ihrer Form auch als L- bzw. T- bzw. Z-Plättchen unterschieden. Diese drei Formen gibt es in den drei Farben Rot, Gelb und Blau. Von jedem Plättchen gibt es drei Stück: also enthält der Materialsatz insgesamt $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ Plättchen.

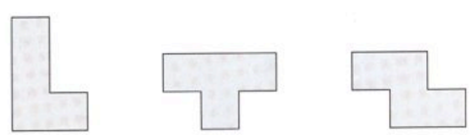
Abb. 1

Man kann sich jedes Plättchen aus vier gleich großen Quadraten zusammengesetzt denken. Insgesamt gibt es fünf Möglichkeiten, vier gleiche Quadrate zu Vierlingen aneinander zu fügen. Von diesen „Tetrominos" bilden die drei mit einspringenden Ecken die Winkelplättchen.

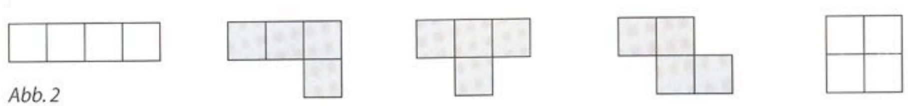
Abb. 2

Für welche Altersgruppe sind die Aufgaben gedacht?
Die Aufgaben sind in sechs Themen gegliedert. Jedes Thema ist nach Schwierigkeitsstufen zweigeteilt. Die einfacheren Aufgaben zum Legen und zur Achsensymmetrie können bereits ab dem ersten Schuljahr eingesetzt werden. Die anderen Themen sind eher für Kinder des dritten und vierten Schuljahres gedacht. Tatsächlich ist das keine starre Zuordnung. Wir haben schon Kinder im Vorschulalter erlebt, die Aufgaben mit Freude und erstaunlichem Geschick „erspielt" und gelöst haben. Probieren Sie es aus!

Auf jeden Fall sollte man auch mit älteren Kindern im ersten Durchgang immer nur die erste Hälfte jedes Themas behandeln und dann im zweiten Durchgang die Aufgaben der zweiten Hälfte. Selbst das sollte mit vielen Unterbrechungen vorgenommen werden. Die Kinder also nicht zu lange und in einem Stück mit den Winkelplättchen beschäftigen!
Welche Karteikarten für den ersten Durchgang vorgesehen sind, können Sie dem Inhaltsverzeichnis (S. 5) entnehmen. Gleiches gilt für die Karteikarten, die für den zweiten Durchgang empfohlen werden; sie sind im Lehrerband zusätzlich durch Schrift in Fettdruck hervorgehoben.

Wie verwendet man die Karteikarten in der Schule?
Die Aufgaben wenden sich in der Ansprache an Einzelpersonen. Und so können die Karteikarten auch zu Hause von einzelnen Kindern benutzt werden. Sie dienen also der Differenzierung im Unterricht. Oft ist es aber zweckmäßig und für die Kommunikation förderlich, wenn sich Partner zusammentun. Ja, das Material kann auch beim Lernen in Stationen verwendet werden: Man bildet Gruppen an sechs Tischen, wo jeweils die Aufgaben eines der sechs Themen ausgelegt sind; denn die Themen bauen nicht notwendigerweise aufeinander auf. Das setzt natürlich voraus, dass auch sechs Materialsätze in der Klasse angeschafft sind.

Was lernen die Kinder an den Winkelplättchen?
Das Legen und Spielen mit den Winkelplättchen ist eine Ergänzung zum Geometrieunterricht in der Grundschule, der ja auf Handlungen gegründet ist. Es werden also Lernziele angestrebt, die auch in Richtlinien formuliert sind:
- *Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens;* spezieller, die Fähigkeit, das Passen oder Nichtpassen geometrischer Formen vorherzusehen.
- *Geometrische Verlagerungen kennen lernen bzw. Einsichten darin vertiefen:* Spiegelung, Drehung, Parallelverschiebung.
- *Mit Symmetrien vertraut werden:* Achsensymmetrie, Drehsymmetrie, Translationssymmetrie.
- Geometrische Figuren wie Rechteck und Quadrat näher kennen lernen.
- Flächeninhalt und Umfang von Figuren, insbesondere ihre Beziehung zueinander, erforschen.
- Die Schönheit der Geometrie empfinden lernen. – Ein Beitrag zur ästhetischen Bildung.

Haben Legastheniker oder Kinder mit Rechenschwäche Probleme?
Im Gegenteil: Diese Kinder finden besonders ungehindert Zugang zur Mathematik und gewinnen Selbstvertrauen, weil sie nicht benachteiligt sind. Es kann höchstens sein, dass

einigen die Aufgaben vorgelesen oder erläutert werden müssen. Ansonsten brauchen Erwachsene bei diesem Legespiel nicht zu helfen. Allerdings haben Kinder es gern, wenn sie ihre Lösungen vorzeigen dürfen.

Wie sollte man die Winkelplättchen einführen?

Eine Einführung ist nicht nötig. Die Kinder können sogleich mit dem spielerischen Legen, also dem ersten Thema, beginnen. Wenn das Material zur Differenzierung angeboten wird, also für einzelne Kinder, ist ein anderer Einstieg ohnehin nicht möglich.

Wenn aber diese Legeaufgaben zum Unterrichtsinhalt für die ganze Klasse gemacht werden, könnte man die Kinder dazu anhalten, die Winkelplättchen selbst zu „erfinden". Ihnen werden vier gleich große Quadrate mit der Aufforderung ausgehändigt, alle möglichen Anordnungen als „Vierlinge" herauszufinden. Dann wäre zu klären, wann zwei Anordnungen als gleich gelten sollen (wenn sie aufeinander passen, also gegebenenfalls auch spiegelgleich sind). Verwenden die Kinder zu dem Zweck gleich große Würfel (statt Quadrate), so erhalten sie drei räumliche Anordnungen hinzu und haben die Teile des Soma-Würfels gefunden, was wünschenswert sein mag, wenn später damit gearbeitet werden soll.

Dokumentation von Lösungen

Auf einigen Karteikarten werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, Lösungen einzuzeichnen. Das betrifft die Karten 7–10, 17, 20, 25, 29, 35, 36, 41–43, 45, 47 und 48. Diese sollten den Schülerinnen und Schülern nur als Kopie ausgehändigt werden (sie sind mit „Kopiervorlage" gekennzeichnet), um zu vermeiden, dass dort nach einmaliger Verwendung bereits die zeichnerischen Lösungen vorhanden sind.

Manchmal ist es auch möglich, von den Kindern eine „Kopie" in ihr Heft zeichnen zu lassen. Dazu können die Winkelplättchen von den Kindern als Schablonen verwendet werden. Älteren Kindern gelingt es auch, die Figuren in kleinerem Maßstab (1:3) auf Rechenkästchen zu übertragen.

Da die Winkelplättchen leicht transparent sind, können alle Aufgaben auch auf dem Tageslichtprojektor vorgeführt werden.

Zu den einzelnen Themen

Legen, Auslegen, Nachlegen

„Auslegen von Umrissfiguren" wird in manchen Richtlinien für den Mathematikunterricht an Grundschulen als Lernziel formuliert. Wir gehen hier einen Schritt weiter, indem die Kinder zunächst selbst im freien Legen Figuren bilden und Formen finden. Das entspricht dem, was im Dreidimensionalen das Zusammenbauen der eben erwähnten Teile des Soma-Würfels ist.

Die Kinder dürfen bei diesen Aufgaben des Legens lange verweilen; denn es werden damit die folgenden Themen bezüglich Symmetrie, Ornamente, Flächengröße vorbereitet.

Achsensymmetrie

Die Idee der Symmetrie ist heute als eine der tiefliegendsten und weitreichendsten Erkenntnisse menschlichen Denkens anzusehen. Sie beherrscht deshalb später auch den Geometrieunterricht in der Schule. So darf das Thema den Kindern hier nicht zum ersten Mal begegnen. Schon in der Vorschulzeit haben sie Klecksbilder und Faltschnitte hergestellt. Das Legen, ein gedankliches Klappen um eine vorgegebene Achse, ist eine weitere Form des Spiegelns; und die Kinder akzeptieren den Begriff „Spiegelachse", weil der Spiegel dieselbe Erscheinung liefert.

Die Aktivitäten mit den Winkelplättchen ergänzen die Erfahrungen zur Achsensymmetrie, die an weiteren Arbeitsmitteln und Tätigkeiten – vor allem Papierfalten und -schneiden – gewonnen werden.

Drehsymmetrie

Der Begriff „Symmetrie" wird gern mit Achsensymmetrie gleichgesetzt. Das ist eine Einengung, der schon in der Grundschule begegnet werden sollte, zumal es so viele drehsymmetrische Figuren und Körper in unserer Umwelt gibt, denen auch die Kinder begegnen: Blüten, Rosetten, Windräder, Faltsterne, Ventilatoren, Schiffsschrauben, Autoradkappen und dergl. Solche Figuren kann man also mit weniger als einer Volldrehung mit sich zur Deckung bringen. Man kann sie auch aufbauen durch sukzessives Drehen eines erzeugenden Elementes – bei uns eines Winkelplättchens. Dabei zeigt sich, dass manche drehsymmetrischen Figuren zugleich achsensymmetrisch sind.

Bandornamente

An Bandornamenten tritt eine dritte Art von Symmetrie auf, die Translationssymmetrie (durch Verschiebung). Denn ein Bandornament ist nach Definition ein periodisches Muster in einem Parallelstreifen. An einem solchen werden bevorzugt Spiegelungen und Drehungen vorgenommen; Untersuchungen führen auf genau sieben Typen, wenn man ausschließlich nach abbildungsgeometrischen Gesichtspunkten ordnet, also ornamentale Ausschmückungen nicht berücksichtigt. Alle sieben Typen lassen sich mit Winkelplättchen realisieren, was die Kinder aber nicht erfahren müssen. Wir beschränken uns darauf, erfindungsreiche Muster zu erzeugen sowie an vorgegebenen Bandornamenten Spiegelachsen und Drehpunkte aufzusuchen.

Die eigentliche Schwierigkeit bei der Verschiebungssymmetrie besteht darin, dass sie die Vorstellung eines nach beiden Seiten unendlich ausgedehnten Bandes voraussetzt. Man kann Kindern mit der Anregung helfen, sie möchten sich das Band um den ganzen Globus gelegt denken, wo es dann auf den Anfang zurückführt. Das ist zwar mathematisch nicht korrekt (erst recht nicht die Vorstellung von Mustern auf Gürteln, Kleidersäumen oder Tellerrändern), vermittelt aber etwas von der Idee des Sich-Wiederholens.

Parkette

Desgleichen muss man sich beim Parkett die ganze Ebene mit periodischem Muster bedeckt vorstellen, also ausgedehnt nach allen Seiten; denn sonst kann es nicht zu vollständigen Deckabbildungen kommen. Realisieren können wir ein ganzes Parkett im mathematischen Sinn sowieso nicht, weder mit Winkelplättchen noch mit sonstigem Material, auch nicht durch Zeichnungen. Die Kinder können nur zu der Vorstellung angeregt werden, das Fußbodenparkett, die Täfelung, die Bedachung oder das Fliesenmuster „geht immer so weiter". Die Betrachtungen an Parketten sollten trotzdem in diesem Zusammenhang der Symmetrien nicht fehlen; denn sie bieten ein beliebtes Anwendungsgebiet für Spiegeln und Drehen. Die Kinder stellen also mit ihren Plättchen – so weit sie reichen – Parkette her oder legen sie Vorbildern entsprechend nach und untersuchen diese auf Symmetrie; d. h. sie zeichnen Spiegelachsen oder Drehpunkte ein.

Größen

Dass man Figuren entsprechend der Anzahl der Plättchen, die zum Bedecken benötigt werden, nach ihrer Größe vergleichen kann, ergibt sich wie selbstverständlich. Die L-, T- und Z-Plättchen sind gleich groß; sie sind ja aus vier gleichen Quadraten gebildet. Als Maßeinheit bietet sich also die Plättchengröße an oder auch die Größe eines Teilquadrates. Bei ähnlichen Figuren – Kreisen und Quadraten, hier den Plättchen und den entsprechenden Vergrößerungen – wächst mit der Flächengröße auch der Umfang und umgekehrt. Dass das aber nicht allgemein so ist, wird an Figuren gezeigt, die von Winkelplättchen erzeugt sind. Auch die konventionellen Maßeinheiten können an den Plättchen gefunden und zu Berechnungen herangezogen werden. Jedes Plättchen ist genau 9 cm^2 groß, sein Umfang misst 15 cm. Zum Abschluss dient ein Legespiel der Wiederholung aller Lerninhalte dieser Kapitel.

Kommentare und Lösungen

Legen, Auslegen, Nachlegen

Freies Legen (1)

Dies dient dem eigenen Erkunden des Materials durch die Kinder. Sie dürfen sich dabei Zeit lassen. Das macht sich bezahlt; alle späteren Legeaufgaben fallen ihnen dann leichter.

1. Die Kinder haben beim Legen auf dem Tisch von selbst das Bestreben, die Plättchen lückenlos aneinander zu fügen und möglichst einfach berandete Felder entstehen zu lassen. Einige Möglichkeiten mit sechs Plättchen, wenn das Muster auf Karte 1 zum Vorbild genommen wird:

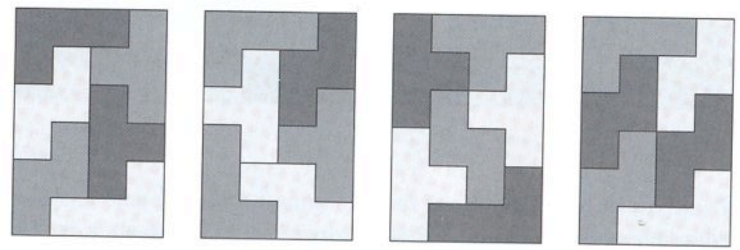

Abb. 3

2./3./4. Dies sind mögliche Anordnungen (Abb. 4a), wenn acht Plättchen genommen werden. Auch vier L-Plättchen oder vier T-Plättchen liefern ein Rechteck, in diesem Falle ein Quadrat (Abb. 4b). Z-Plättchen liefern keinen „glatten" Rand (Abb. 4c).

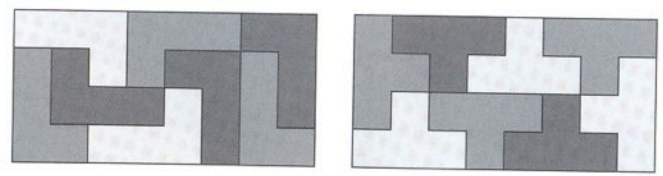

Abb. 4a

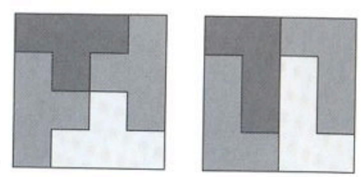

Abb. 4b

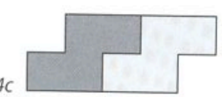

Abb. 4c

5./6./7. Bei Verwendung einer ungeraden Anzahl von T-Plättchen kann man nie ein Rechteck erhalten. (Man stelle sich das Rechteck schachbrettartig schwarz/weiß gemustert vor. Dann müssten auch (wie beim L und Z) auf das T gleich viele schwarze wie weiße Quadrate fallen.) Abb. 5a zeigt Lösungen für zwei T-Plättchen; Abb. 5b zeigt die Lösung für Aufgabe 6.

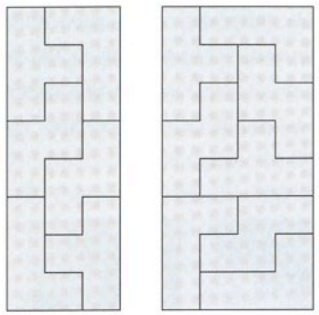

Abb. 5a

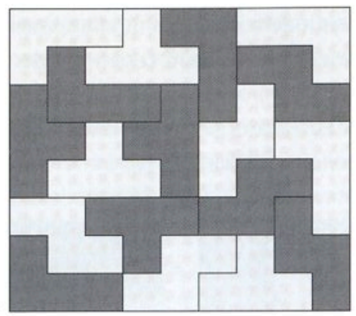

Abb. 5b

Auslegen (2)

Wie so häufig, können hier auch zwei Partner zusammenarbeiten, ohne dass noch ein weiterer Materialsatz benötigt würde.

1. Die Lösungen (Plättchen in beliebiger Farbe):

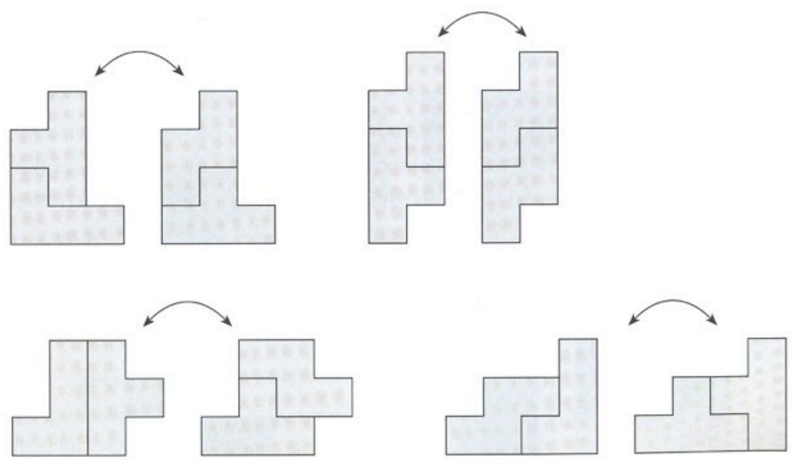

Abb. 6

2. Neue Möglichkeiten:

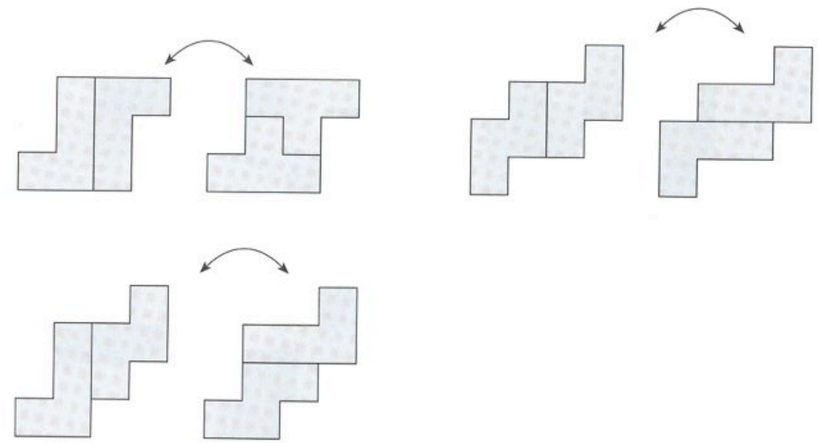

Abb. 7

Auslegen (3)

Im Verlauf der weiteren Beschäftigung mit den Winkelplättchen lernen die Kinder auch vorherzusagen, ob eine Umrissfigur passend ausgelegt werden kann und ob nicht. Solche treten hier absichtlich – auch in „verdrehter" Stellung – auf.

1. Nur die beiden unteren Figuren können ausgelegt werden, nämlich so:

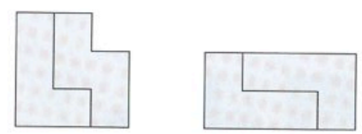

Abb. 8

2. Mögliche Lösungen:

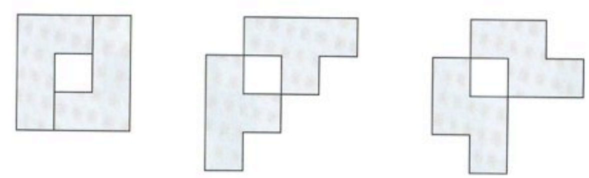

Abb. 9

Auslegen (4)

1. Mögliche Lösungen für die Legeaufgabe mit den L-Plättchen:

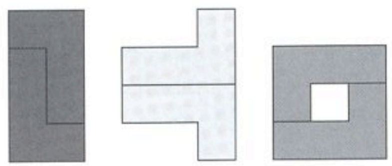

Abb. 10a

Mögliche Lösungen für die freie Legeaufgabe:

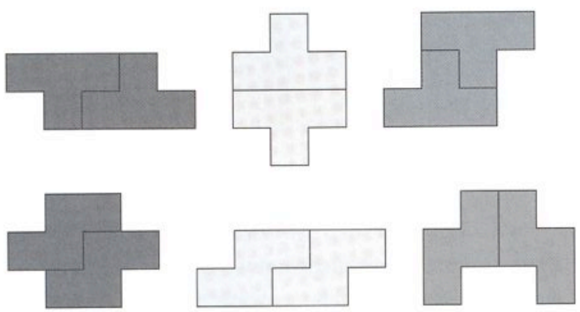

Abb. 10b

2. Erstmals werden Figuren mit drei Winkelplättchen gelegt. Außer mit L-, T- und Z-Plättchen können beide Figuren auch anders bedeckt werden.

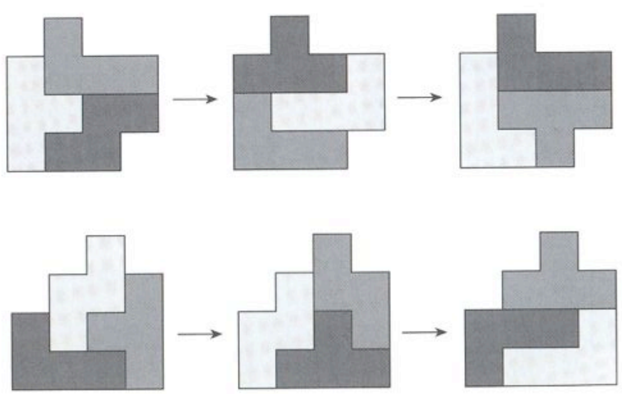

Abb. 11

Auf dem Tisch können die folgenden Figuren liegen – in verschiedenen Farben oder auch in der gleichen Farbe:

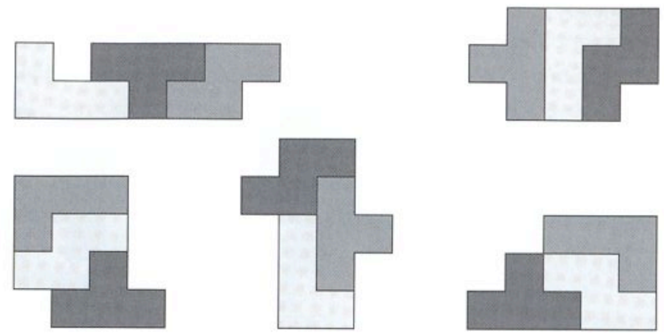

Abb. 12

Dass bei Verwendung von einem L-, einem T- und einem Z-Plättchen kein Rechteck entstehen kann, wurde auf Seite 12 oben begründet.

Auslegen (5)

Die erste Figur oben kann auch mir vier T-Plättchen ausgelegt werden (statt wie unten ausgezeichnet mit vier Z-Plättchen). Je einfacher die Umrissfigur, desto schwieriger ist die Bedeckung, wie hier am Quadrat zu erfahren. Und doch gibt es weitere Lösungen als die hier aufgezeichneten, von denen zwei drehsymmetrisch sind und eine achsensymmetrisch ist:

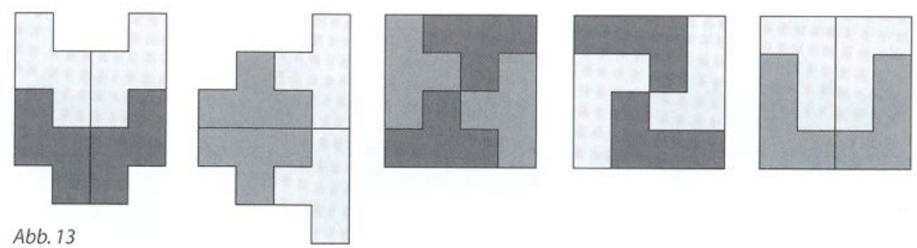

Abb. 13

Auslegen (6)

Da diese Figuren ausgeprägte Gestalt haben, die das Auslegen erleichtern, brauchen die Lösungen hier nicht aufgezeichnet zu werden. Der Einsatz des Tageslichtprojektors bietet sich an.

Auslegen und Aufzeichnen (7)

„Sich nicht berühren" soll heißen: nicht längs einer Seite, wohl aber in einem Punkt. Bis auf einen Fall (links unten vier L) könnte die Bedingung auch mit nur zwei Farben schon erfüllt werden.

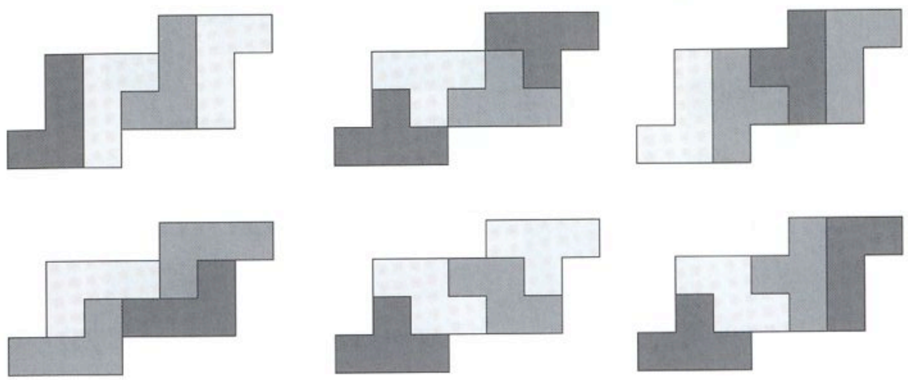

Abb. 14

Auslegen, Nachlegen, Aufzeichnen (8)

Wieder sollen Plättchen in gleicher Farbe sich nicht berühren. Von den vielen Möglichkeiten sind hier in den Zeichnungen nur zwei wiedergegeben. Die zweite (hier in der MItte) ist außerdem drehsymmetrisch in der Auslegung. Das gilt auch für die mittelgroße Figur (hier rechts). Das ist aber für die Kinder noch kein Gesichtspunkt. Die kleine Figur unten kann man überhaupt nicht passend auslegen.

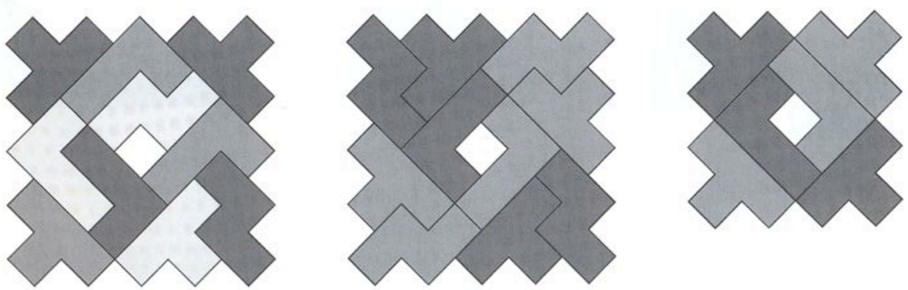

Abb. 15

Nachlegen, Legen, Aufzeichnen (9)

Beiläufig können die Kinder hier lernen, dass das Dromedar ein einhöckeriges Kamel ist. Wieder wird das Nachlegen einer verkleinert wiedergegebenen Figur, die man hier als Tier interpretieren kann, verlangt. Wie die Einfärbung nahelegt, können Plättchen gleicher Farbe gewählt werden. Es können also wieder Partner mit ein und demselben Materialsatz arbeiten. Die von den Kindern gefundenen „Tiere" können auf dem Tageslichtprojektor gezeigt werden.

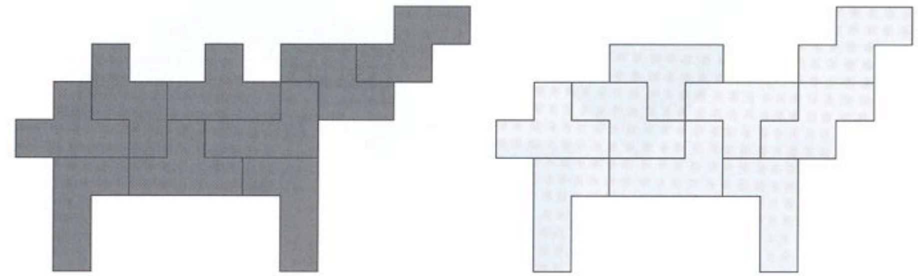

Abb. 16

Nachlegen, Legen, Aufzeichnen (10)

Dies sind im Prinzip dieselben Aufgaben wie auf der vorigen Karte. Zur Differenzierung kann verlangt werden, dass nie zwei Plättchen gleicher Farbe aneinander stoßen sollen, oder auch, dass die Farbgebung besonders „schön" aussehen soll. Das ist hier angestrebt:

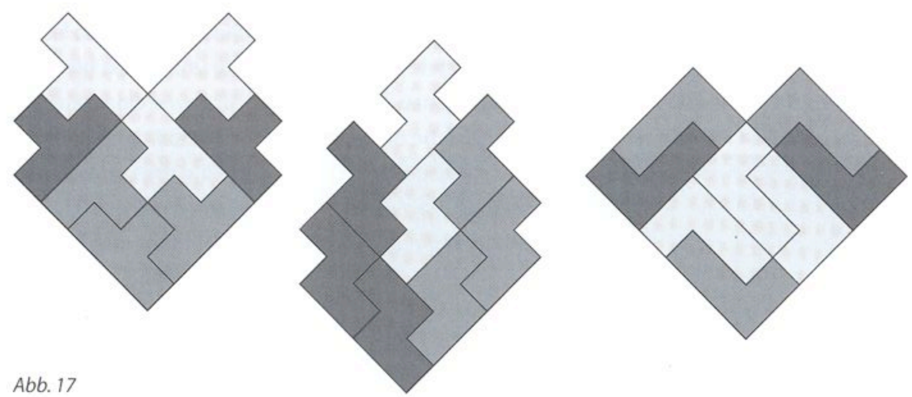

Abb. 17

2. „Einfach“ soll heißen: möglichst kompakt, also mit wenig „Löchern“. Das aber werden die Kinder von sich aus anstreben. Lösungen könnten so aussehen:

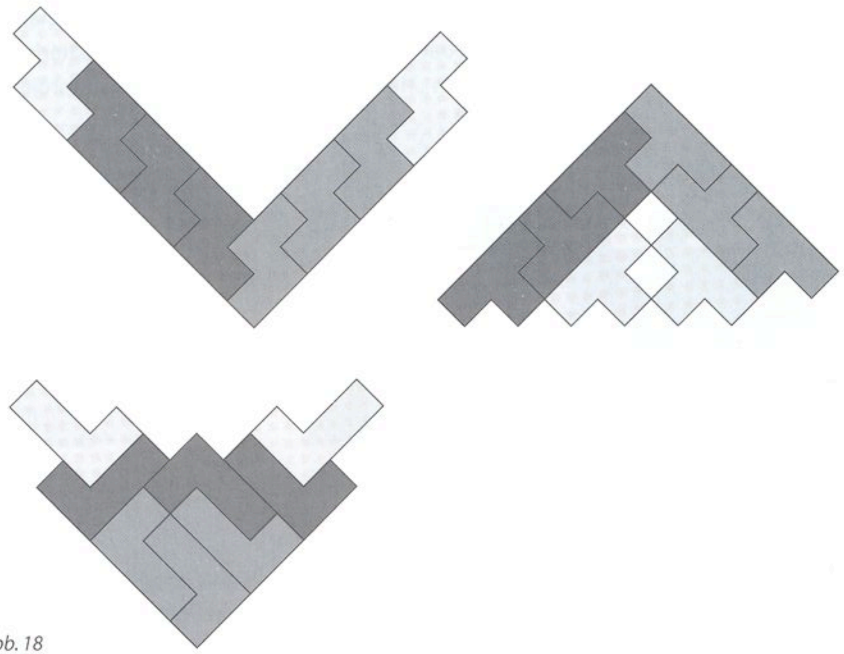

Abb. 18

Auslegen und Aufzeichnen (11)

1. Die Kinder stellen fest, dass bei jedem Versuch immer zwei Quadrate unbedeckt bleiben.
2. Bei systematischem Vorgehen würde man genau 48 Fälle finden, um zwei Quadrate frei zu lassen. In 44 Fällen von diesen ist eine solche Bedeckung mit Winkelplättchen durchführbar. Von den restlichen vier Fällen sind drei unter der folgenden Aufgabe vorgegeben.
3. Dass diese drei Fälle nicht wie gefordert zu realisieren sind, sehen die Kinder sofort ein: mit welchem Plättchen sie (natürlich links) beginnen, sofort ist es nicht mehr möglich, ein zweites Plättchen passend zu legen.

Rechtecke legen (12)

Diese Aufgabe bezieht sich auf einen Materialsatz von $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ Plättchen, also jedes Plättchen genau dreimal in derselben Farbe.

1. Die Möglichkeiten für 2 bis zu 8 Plättchen sind hier in Beispielen aufgezeichnet.

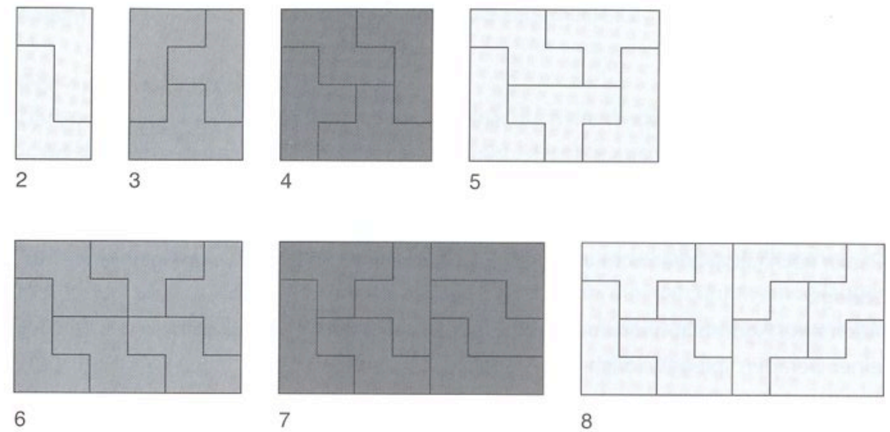

Abb. 19

Dass alle neun Plättchen sich nicht zu einem Rechteck legen lassen, liegt wieder an den drei T-Plättchen (vgl. S. 12 oben).

2. Es gibt viele Möglichkeiten, diese Rechtecke mit den 18 Plättchen passend zu bedecken. Bei den hier abgebildeten Lösungsmöglichkeiten ist auf Isolierung der Farben geachtet.

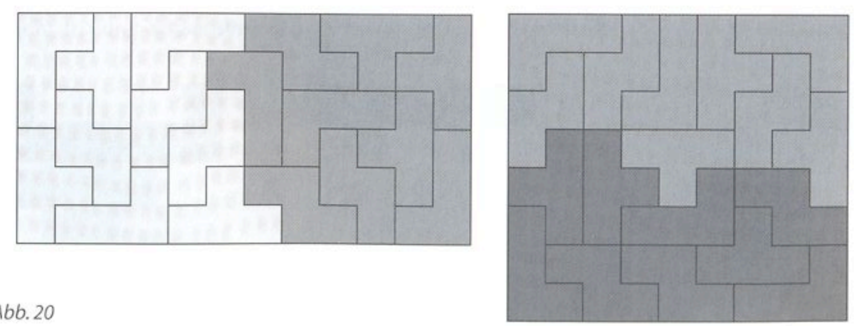

Abb. 20

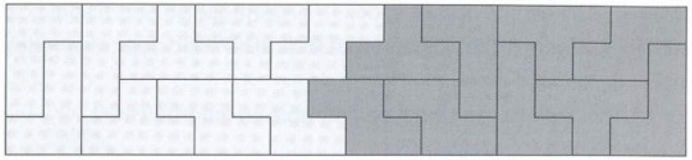

Abb. 20

Achsensymmetrie

Achsensymmetrie (13)

Eine Figur heißt achsensymmetrisch oder auch spiegelsymmetrisch (bei Verwendung von Papier auch faltsymmetrisch), wenn es eine Gerade gibt, die sie in zwei spiegelgleiche Hälften zerlegt.

Auch zwei Figuren können zueinander achsensymmetrisch sein, wenn man sie nämlich zu einer Geraden spiegelbildlich legen kann.

Bei räumlichen Gegenständen trennt nicht eine Gerade, sondern eine Ebene die beiden Teile. Zunächst wird das aber nicht unterschieden. Die Kinder werden unter 2. sogar vornehmlich räumlich spiegelbildliche Gegenstände aufzählen: Gesicht oder Körper von Mensch und Tier, Gebäude, technische Gegenstände, Objekte aus dem Klassenzimmer und dergl.

1./2. Der Einsatz von Winkelplättchen ist ja nur eine Möglichkeit, den Begriff der Achsensymmetrie handelnd erfahren zu lassen und in Aktivitäten zu vertiefen. Vorab sollten auch hier achsensymmetrische Figuren und Körper aus der Umwelt erkannt und angesprochen werden.

3. Spielerisches Entdecken darf dem geordneten Vorgehen durch die gezielten Aufgaben auf den folgenden Karten vorausgehen.
4. Die Lösungen der Kinder könnten so aussehen:

Abb. 21

Bei der „Brücke" sind die Kinder geneigt, diese nach rechts und links fortzusetzen. Jedes Mal bleibt das Gebilde achsensymmetrisch.

Symmetrische Figuren (14)

Im Schulunterricht und auch in den Schulbüchern besteht die Neigung, die Achse senkrecht anzuordnen. Das hängt sicher mit den Naturerscheinungen zusammen: dem menschlichen Körper, den (gegen die Schwerkraft gewachsenen) Tannen und Fichten, den so angelegten Bauten u. a. Der mathematische Begriff und die Gesetzlichkeiten erfordern das nicht, und so empfehlen wir auch sogleich die allgemeine Lage.

Spiegeln an verschiedenen Achsen (15)

1. Der Lösung von einer bestimmten Lage dient hier auch der Wechsel der Achsenrichtung. – Wo das vorgegebene Plättchen rot gezeichnet ist, sollte auch das Spiegelbild in Rot gelegt werden.
2. Hier bieten sich auf Grund der Z-Figur sogar sechs Lagen für die Achse an.
3. Auch hier werden die Kinder sechs Achsen herausfinden, wenn sie das T-Plättchen vor sich haben. Grundsätzlich kann jede Gerade auf dem Tisch, die man durch einen langen Bleistift markieren kann, als Achse gewählt werden. Beim T, da es selbst achsensymmetrisch ist, geht eine Achse sogar durch die Figur.

Symmetriespiel (16)

Die Kinder werden streiten, wann ein Plättchen noch hinreichend auf die Karteikarte passt. Sie müssen sich ferner einigen, ob der Text auch bedeckt werden darf. Aber es kommt ja nur darauf an, dass die Spiegelbilder korrekt gelegt werden.

Gewinnen wird immer der zweite Partner; denn wo der erste noch ein Plättchen legen kann, ist auf der gegenüberliegenden Seite auch noch Platz; es sei denn, es gibt kein Plättchen mehr von gleicher Form und Farbe.

Achsen aufsuchen (17)

Nur drei der sieben Figuren sind achsensymmetrisch, nämlich oben in der Mitte, rechts in der Mitte, und unten links. Die Figur m. l. kann mit dieser Plättchenfärbung überhaupt nicht zu einer achsensymmetrischen umgestaltet werden. Die anderen vielleicht so:

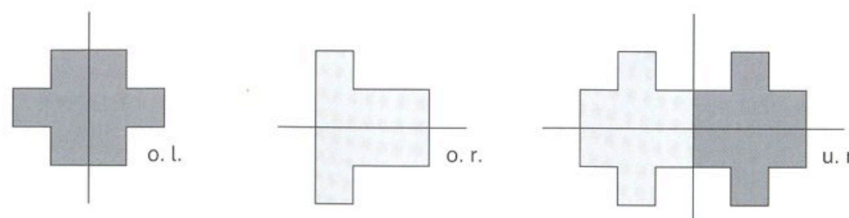

Abb. 22

Spiegelbilder (18)

Die Karounterlegung hilft. Das ist auch nötig; denn jetzt bilden Urbild und Abbild nicht mehr eine zusammenhängende Figur.

Symmetrisch ergänzen (19)

Eine Karounterlegung ist jetzt nicht mehr erforderlich, zumal die Ausgangsfiguren aus mehreren Plättchen Hilfe leisten.

Symmetrisch auslegen (20)

Beim symmetrischen Auslegen sollen die Kinder natürlich auch auf die entsprechenden Farben achten, während sie als Lösungen (unten) nur die Trennlinien einzuzeichnen brauchen.

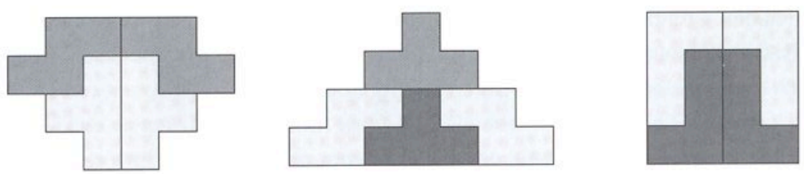

Abb. 23

1, 2, 3 und 4 Achsen (21)

1. Jetzt müssen unter dem Thema Achsensymmetrie zum ersten Mal verkleinert abgebildete Figuren auf dem Tisch nachgelegt werden.
   Anzahl der Achsen: links oben und unten 2, Mitte 4; rechts oben 1, rechts unten 3 – sofern die Farben richtig gewählt wurden. Bei der mittleren Figur kann es zum Beispiel, je nach Farben, auch nur zwei oder gar keine Achse geben.
2. Von den vielen möglichen Lösungen sind hier nur solche aus T-Plättchen wiedergegeben. Dabei würde für „mit einer Achse" ein einziges Plättchen genügen, für „ohne jede Achse" zwei verwinkelt liegende. Die hier wiedergegebene Figur aus vier T-Plättchen hat eine andere „schöne" Regelmäßigkeit: Sie ist drehsymmetrisch.
   Mit L- oder Z-Plättchen würde es für manche hier gestellte Anforderung überhaupt keine Möglichkeit geben.

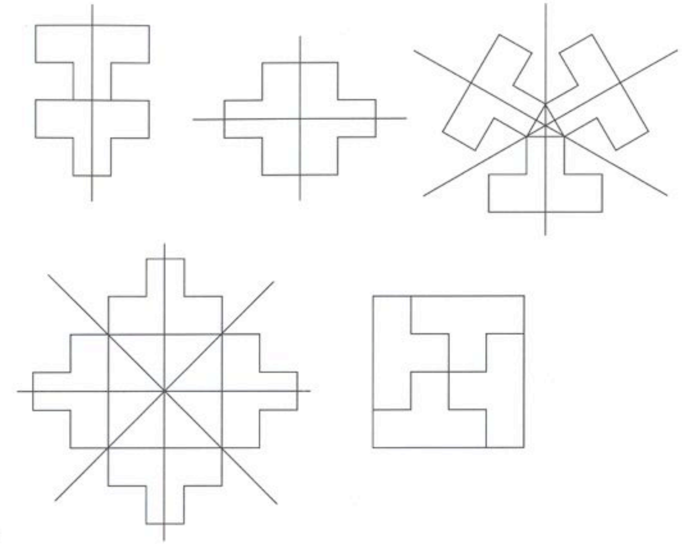

Abb. 24

Doppelspiegelung (22)

Das Original und das zweifach gespiegelte Plättchen bilden natürlich kein spiegelsymmetrisches Paar. Die Kinder werden aber eine gewisse Zusammengehörigkeit bemerken, für die ihnen noch der Begriff fehlt: Sie sind „punktsymmetrisch" zueinander. Das lernen sie im folgenden Kapitel.

Drehsymmetrie

Drehsymmetrie (23)

Eine Figur heißt drehsymmetrisch, wenn sie einen Mittelpunkt hat, so dass sie bei einer Halbdrehung oder Drittel-, Viertel-, Fünftel-, ...drehung mit sich selbst zur Deckung kommt. Ein unerschöpfliches Beobachtungsfeld dafür sind Auto-Radkappen. Wir schauen hin: Wann deckt sich das Muster zum ersten Mal wieder? Wenn das zum Beispiel nach einer Vierteldrehung der Fall ist, spricht man von einer vierzähligen Drehsymmetrie. Eine Figur kann also zwei-, drei-, vier-, fünf-, ...zählig drehsymmetrisch sein.

Bei räumlichen Gegenständen erfolgt die Drehung nicht um einen Punkt, sondern um eine Drehachse, eine Gerade also. Das thematisieren wir aber bei einer ersten Betrachtung nicht.

1./2. Die aufgezählten und die von den Kindern vermutlich genannten Gegenstände sind räumlich drehsymmetrisch.

3. Winkelplättchen erzeugen bei ihrer flachen Form eher ebene Figuren. Spielerische Entdeckungen gehen den folgenden geordneten Aufgaben wieder voran. Die Winkelplättchen verleiten wegen ihrer rechtwinkligen Form zur Erzeugung von vierzählig drehsymmetrischen Figuren. Dabei ergeben sich allein mit vier Plättchen gleicher Form sehr viele verschiedene Figuren.

Da in einem Materialsatz jedes Plättchen nur dreimal in derselben Farbe vorhanden ist, kann man streng genommen vier-, fünf-, sechs-, ...zählige Drehsymmetrie nicht realisieren. Da müssen wir also von den Farben absehen.

Drehsymmetrisch auslegen (24)

1. Wir bleiben zunächst bei vierzähliger Drehsymmetrie, wie es die Winkelplättchen nahelegen. Mit der Aufforderung, Legemöglichkeiten evtl. schon „vorweg" zu sehen, soll das Formerkennen im Gegensatz zum bloßen Probieren angestrebt werden.
2. Hier zum Beispiel sollen die Kinder schon im Voraus sehen, dass bei der linken Figur T-Plättchen ungeeignet sind. Bei der rechten dagegen können Z-Plättchen nicht passend gelegt werden.

Drehsymmetrisch auslegen (25)

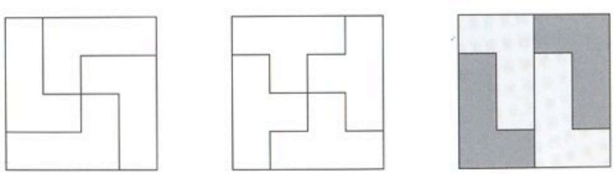

Abb. 25

1. Die drei Möglichkeiten für die linke Figur (mit L, mit T und auch mit Z) werden die Kinder leicht finden. Bei der rechten Auslegung stoßen sie auf Schwierigkeiten, weil das dritte Muster erst nach einer Halbdrehung mit sich zur Deckung kommt.
2. Auch dies ist einfach. Die Kinder sollten vorhersehen, wie mit den L-, entsprechend mit den T- und dann den Z-Plättchen, begonnen werden muss.

Drehsymmetrisch auslegen (26)

1. Wie sehen die acht Möglichkeiten aus?
   a) Legt man vier L-Plättchen außen herum, so bleibt innen ein Quadrat, und dafür gibt es die drei Möglichkeiten von Karte 25.
   b) Legt man außen vier T-Plättchen, so bleibt innen die Figur von Karte 25 unter 1. Und dafür fanden die Kinder wieder drei Möglichkeiten des Auslegens.
   c) Vier Z-Plättchen außen herum lassen innen Platz für genau vier T-Plättchen.
   d) Schließlich kann man vier L-Plättchen auch so außen anbringen, dass innen weitere vier L-Plättchen passen.
2. Hier die Möglichkeiten für die verkleinert abgebildete Figur (links entsteht innen die Figur von Karte 25 unter 2. mit ihren drei Möglichkeiten des Auslegens):

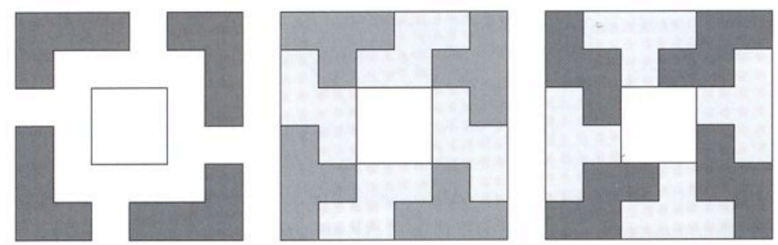

Abb. 26

Feuerräder (Sechszählige Drehsymmetrie) (27)

Sechszählig ist die Drehsymmetrie auf dieser Seite streng genommen nur, wenn alle Teile von gleicher Farbe sind. Das abgebildete „Feuerrad" in drei Farben ist so gesehen also zweizählig.

Es wird die Kinder nicht stören, wenn beim Legen – insbesondere bei Aufgabe 3 – die Nachbarabbildungen oder auch der Text teilweise überdeckt werden.

Flügelräder (Dreizählige Drehsymmetrie) (28)

Wie auf dem vorigen Blatt das sechseckige Loch, dient hier das dreieckige als Hilfe für das Legen. Die drei verschieden langen Seiten der Dreiecke entsprechen den Längen, die an den Winkelplättchen auftreten; später 1 LE, 2 LE bzw 3 LE genannt.

Halbdrehung (Zweizählige Drehsymmetrie) (29)

1. Um den Anschluss an die beiden vorigen Karten herzustellen, beziehen wir sogleich Figuren mit einem „Loch" ein. Dieses als Hilfe vorzugeben, ist aber wegen der Rechtwinkligkeit der Plättchen nicht nötig.
   Die Halbdrehung heißt auch Punktspiegelung, und das Ergebnis punktsymmetrisch, weil man die Figuren an einem Punkt, dem Drehpunkt, spiegeln kann: Jedem Punkt der einen Hälfte liegt ein Punkt der anderen zentral gegenüber. Das ist bei vier-, sechs-, acht-, ...zähliger Drehsymmetrie auch der Fall, bei drei-, fünf-, sieben-, ...zählig drehsymmetrischen Figuren aber nicht.
   Die Halbdrehung und das Aufsuchen der Drehpunkte ist später bei den Bandornamenten und Parkettierungen wichtig. Als Deckdrehung kommt dort nur die Halbdrehung in Frage.
2. Die Drehpunkte:

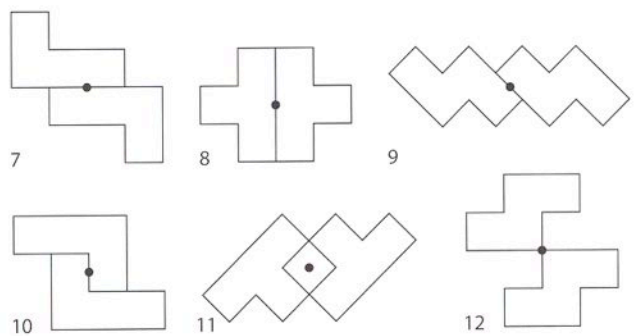

Abb. 27

3. Hier einige punktsymmetrische Figuren, die möglicherweise von den Kindern gefunden werden:

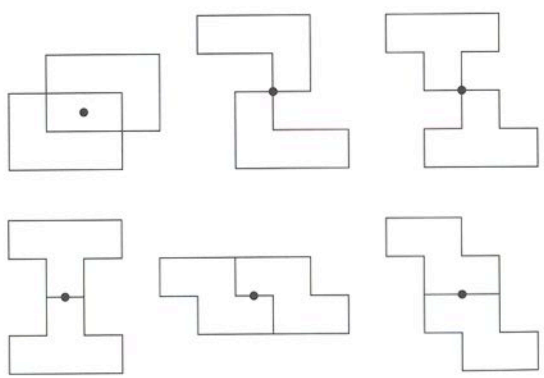

Abb. 28

Halbdrehung (30)

Der blaue Punkt wird jedes Mal Zentrum für die entstehende punktsymmetrische Figur. Das gilt auch bei Halbdrehung um den roten Punkt, der aber nicht an der Figur liegt, sondern ein quadratisches Loch erzeugt.

4. Beim Vergleich erkennen die Kinder, dass Halbdrehung dasselbe bewirkt wie Doppelspiegelung an zueinander senkrechten Achsen.

Vierteldrehung (31)

Zuerst wird ein Plättchen auf die (voll umrandete) Ausgangsfigur gelegt. Dann drei weitere rings herum, jeweils mit Vierteldrehung. Das Ganze ist dann eine vierzählig drehsymmetrische Figur, jedenfalls wenn man von den Farben absieht; denn in einem Materialsatz ist jedes Plättchen ja nur dreimal in derselben Farbe vorhanden.

Drehen (Zweizählig drehsymmetrische Figuren) (32)

1. Es gibt, bedingt durch den Rand des L-Plättchens, der zehn Längeneinheiten hat, genau 20 mögliche Figuren der gewünschten Art; natürlich nur, wenn jedes Mal um genau eine Längeneinheit verschoben wird. Es kommt aber nicht darauf an, alle diese Fälle entdecken zu lassen. Dasselbe gilt nämlich auch für zwei T- und zwei Z-Plättchen (Aufgabe 2. und 3.). Es wäre dagegen erfreulich, wenn die Kinder bei diesem Spielen etwas von der Schönheit der Figuren empfinden würden.

Drehen (Vierzählig drehsymmetrische Figuren) (33)

Besonders bei der Erzeugung dieser vierzählig drehsymmetrischen Figuren springt die Schönheit der Symmetrie ins Auge. Die Kinder müssten Freude haben, immer wieder andere hübsche Muster zu gewinnen. Jede der Figuren ist bei Berücksichtigung der Farbe im strengen Sinne nur zweizählig drehsymmetrisch, aber einfarbig wirken die Muster nicht so reizvoll.

Drehen und Spiegeln (34)

1. Zuerst ist einzusehen, dass das gelbe Plättchen jeweils zum blauen drehsymmetrisch liegt (Halbdrehung). Dann soll erkannt werden, dass die Halbdrehung auch durch zwei Spiegelungen bewirkt werden kann; dabei muss die zweite Spiegelachse senkrecht zur ersten (grünen) liegen.
2. Dasselbe wird hier erfahren. Die Karounterlegung erleichtert das Vorgehen allein an der Zeichnung.

Symmetrie (35)

Es kommen alle Fälle vor: achsensymmetrisch und nicht drehsymmetrisch, drehsymmetrisch und nicht achsensymmetrisch, beide Eigenschaften vorhanden und auch beide nicht:

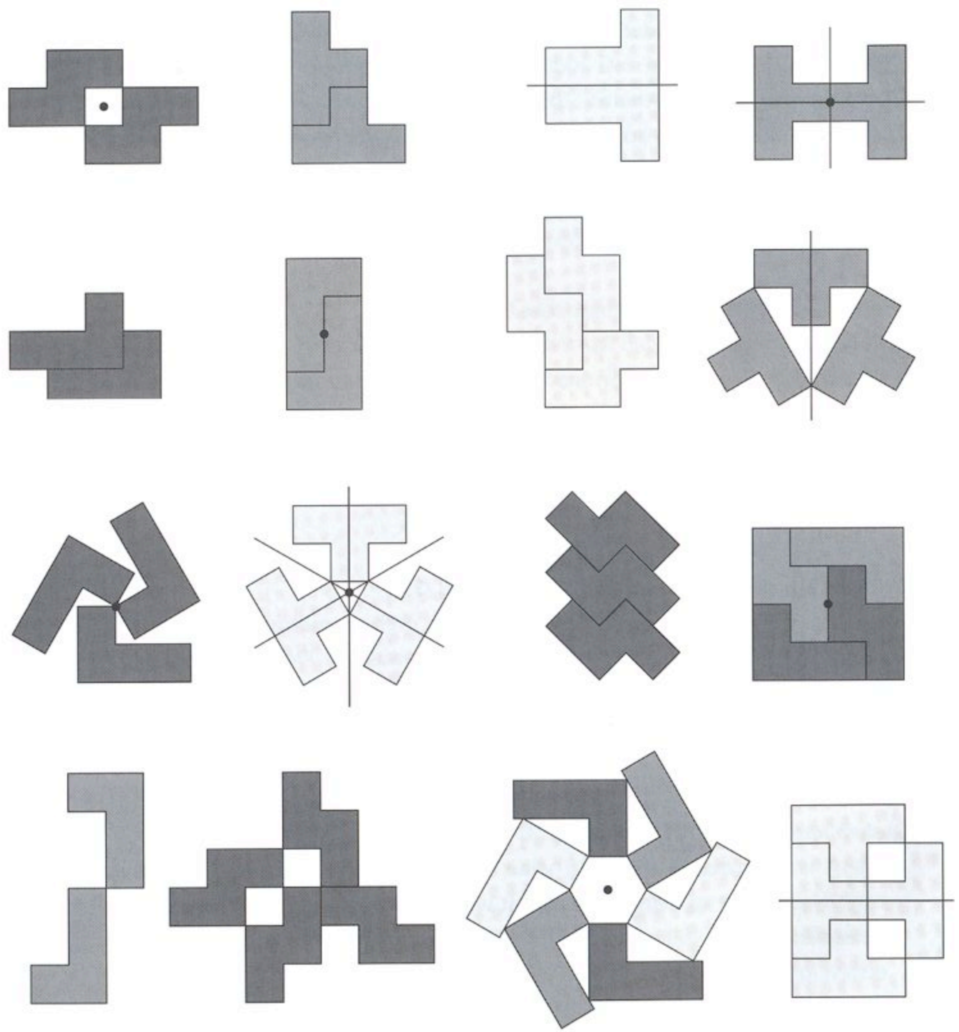

Abb. 29

Symmetrie (36)

1. Diese Aufgabe soll auf das Thema Bandornamente und Parkette vorbereiten und die Aufmerksamkeit auf Muster lenken, die in der Umwelt der Kinder vorkommen: Teppiche, Kissen- und Polsterbezüge, Täfelungen, Fliesen u. a.
2. Auch eine einzige Figur kann symmetrisch sein und nicht nur zwei Teile zueinander. Alle drei Fälle kommen an den Winkelplättchen selbst vor: L keine Symmetrie, T achsensymmetrisch, Z drehsymmetrisch.

Bandornamente

Bandornamente (37)

Ein Bandornament ist ein Muster in einem Parallelstreifen mit Translationsperiode (Verschiebungssymmetrie).

1. Eine Verschiebung, die zur Deckabbildung führt, ist eigentlich nur möglich an unendlich ausgedehntem Band. Insofern sind die (zyklischen) Muster an Tassen, Tapeten oder Badezimmerfliesen nur analoge Modelle, die aber der Vorstellung der Kinder aufhelfen und das Wesentliche sehr wohl zeigen: die unendliche Wiederkehr.
2. Wieder sollte die erste Begegnung mit Bandornament und Verschiebungssymmetrie nicht an den Winkelplättchen erfolgen, sondern durch Beobachtung der Phänomene stattfinden.
3. Die ersten Aktivitäten dürfen mit Absicht ungeordnet und fehlerhaft sein.

Bänder mit L, Z oder T (38)

In allen Fällen sollte auch die Frage nach der Translationsperiode gestellt werden: Um wie viel muss man das Muster auf dem Band nach rechts (oder nach links) verschieben, bis es wieder mit sich zur Deckung kommt? Bei dem verkleinert abgebildeten Muster aus L-Plättchen ist das erst nach 12 Stücken der Fall, ohne Farbwechsel nach 4, wie darüber.

2. Hier wird deutlich: Das längere Band erzeugt immer der, der alle drei Farben verwendet. Und die Verschiebungsperiode wird dementsprechend auch länger, am kürzesten bei Einfarbigkeit. Die „Länge des Bandes" meint natürlich immer die endliche Realisierung mit Plättchen. Das Band ist theoretisch immer unendlich lang.

L – Z – T kombiniert (39)

Je mehr Plättchen wir zu einem Baustein des Bandornaments zusammenfügen, einen desto längeren Abschnitt vom Bandornament können wir realisieren.

Bandornamente mit Löchern (40)

Bandornamente mit Löchern dürfte es eigentlich gar nicht geben; denn nach Definition muss der Parallelstreifen lückenlos ausgefüllt sein. Unter den Lernzielen, die wir im Auge haben, ist aber der spielerische Umgang auch mit lückenhaften Streifenmustern vertretbar: Wir wollen gesetzmäßige Folgen herausfinden lassen, Fortsetzungen provozieren, Symmetrien entdecken helfen, Fantasie anregen und die Schönheit der Geometrie empfinden lassen.

Weitere Bandornamente mit Löchern wären:

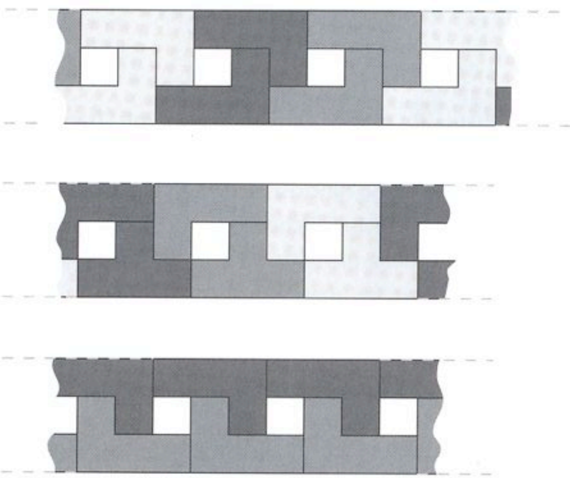

Abb. 30

Bandornamente mit Spiegelachsen (41)

Bandornamente haben per Definition zumindest eine Symmetrieeigenschaft, die Verschiebungssymmetrie. Sie können aber auch achsen- oder drehsymmetrisch sein.

1. Es stellt sich heraus, dass kaum (wegen der Rechtwinkligkeit der Plättchen) eine Längsspiegelachse vorliegt, ohne dass zugleich Querspiegelachsen auftreten. Zweckdienlich ist es, einzelne Plättchen zu markieren und zu verfolgen, wohin sie bei Querspiegelung abgebildet werden.

2. Die drei vorgezeichneten Ornamente haben: eine Längsspiegelachse – Querspiegelachsen – beides. Dort, wo sich die Längsspiegelachse mit den Querspiegelachsen schneidet, liegt immer auch ein Zentrum für eine Halbdrehung (vgl. Karte 34).

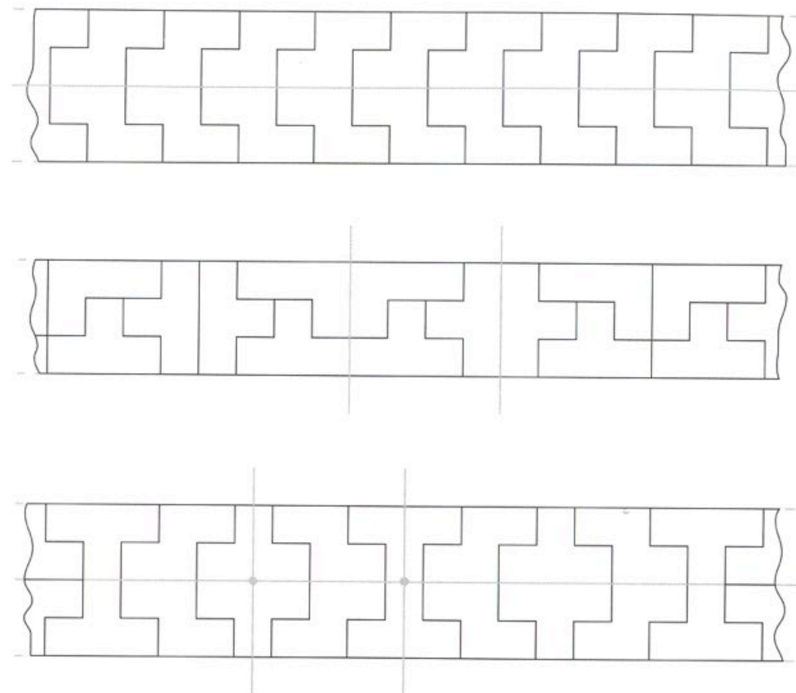

Abb. 31

Bandornamente mit Drehpunkten (42)

Als Drehsymmetrie kommt bei Bandornamenten natürlich nur die Halbdrehung in Frage. Wegen der Periodizität tauchen Drehpunkte, sofern vorhanden, im Muster immer wieder auf. Es genügt also, jeden Typ nur einmal zu markieren; und zwar gibt es wie bei den Querspiegelachsen immer zwei Typen.

1. Die Bandornamente auf den Karten 38 bis 40 sind fast alle drehsymmetrisch, wenn man gelegentlich von der Farbgebung absieht. Das letzte Beispiel auf Karte 41 ist auch drehsymmetrisch, weil es sich rechtwinklig schneidende Spiegelachsen hat.
2. Tatsächlich sind alle vier Ornamente drehsymmetrisch. Die unteren beiden haben auch zwei Typen von Spiegelachsen; die Drehpunkte liegen nicht darauf:

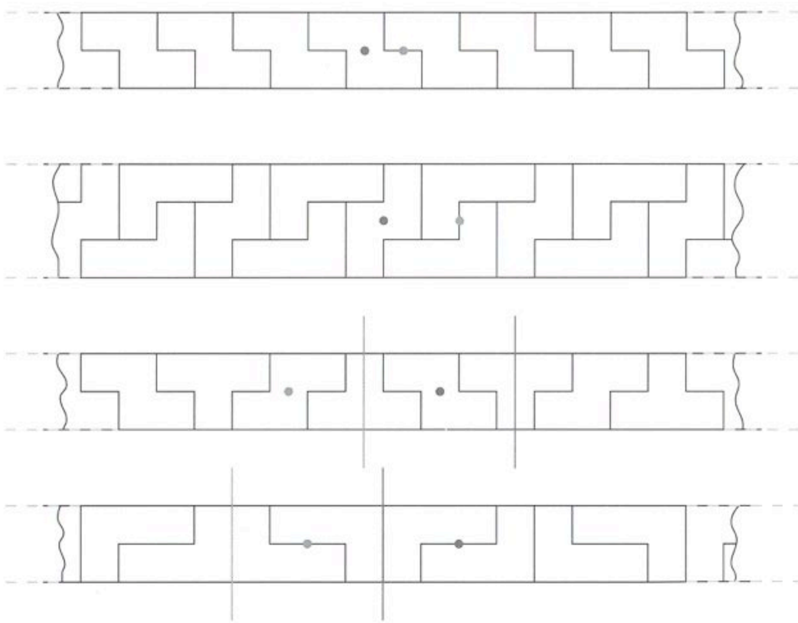

Abb. 32

Symmetrie, Symmetrie! (43)

Abschließend werden acht weitere Bandornamente auf Symmetrie untersucht. Bei einer Farbfolge mit größerer Periode würden Querspiegelachsen oder Drehpunkte zu weit auseinander liegen, als dass die Kinder die Deckabbildungen überhaupt noch erkennen würden. Deshalb beurteilen wir die Symmetrie nur nach dem Muster, also mit der kürzesten Periode.

Nur das Ornament unten links scheint gar keine Symmetrie zu haben, und die Kinder können in der Tat nichts einzeichnen. Was wir hier nicht behandeln, ist die Schubspiegelung. Das ist eine Deckabbildung zunächst durch Verschiebung in Längsrichtung um die Elementardistanz und dann eine Spiegelung an der Längsachse. Diese Symmetrie hat das Ornament unten links allerdings doch.

Im Übrigen:

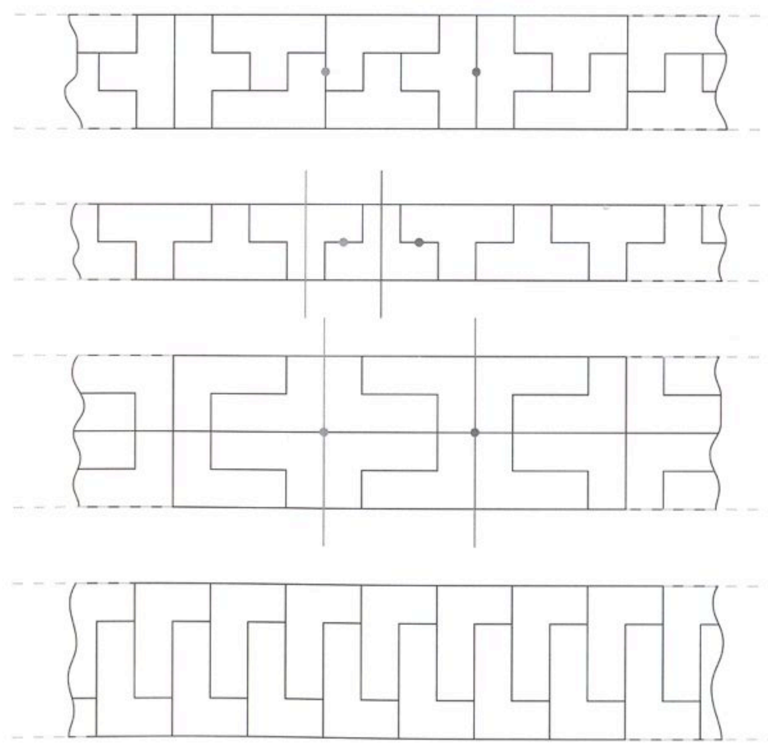

Abb. 33

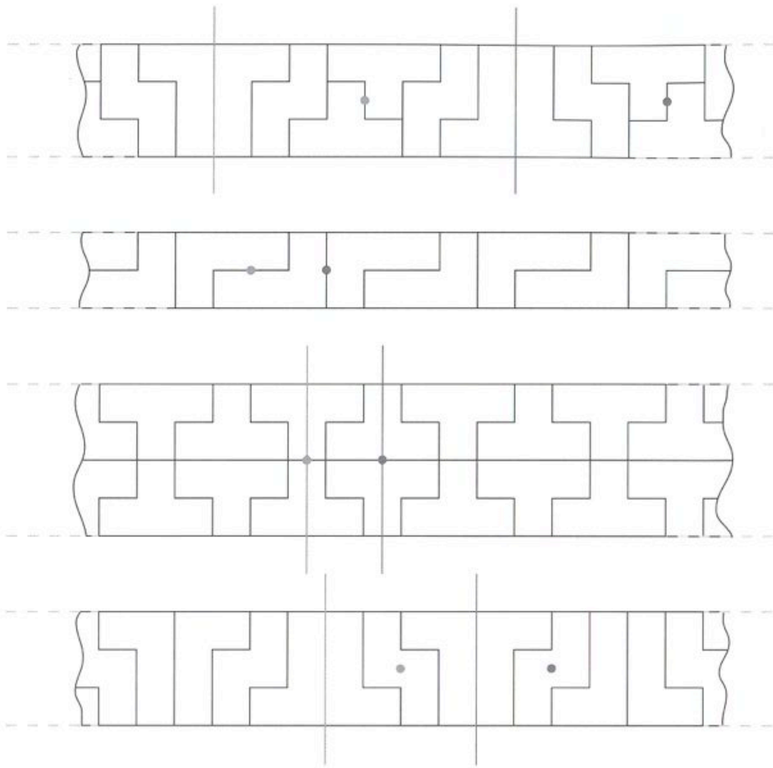

Abb. 33

Parkette

Parkett (44)
Ein Parkett ist eine lückenlose Bedeckung der Ebene mit gleichen Bausteinen, so dass die Verschiebung eine Deckabbildung wird. Die Deckabbildung durch Verschiebung muss in mindestens zwei verschiedenen Richtungen möglich sein.
Ein Parkett lässt sich also praktisch immer nur im endlichen Bereich realisieren; theoretisch muss man sich das Muster nach allen Richtungen unendlich ausgedehnt denken.
Parkettierungen sind im Unterricht reizvoller Anlass, Muster zu erzeugen und auf die verschiedenen Symmetrien hin zu untersuchen. Kinder erfahren damit zugleich etwas von der Schönheit der Geometrie. Nach Beobachtungen in der Umgebung zum Zwecke der Begriffsbildung dürfen die Kinder frei mit dem Material umgehen, bevor gezielte und geordnete Erfahrungen vermittelt werden.

T-Parkett (45)
Die vier abgebildeten Parkette sollen nicht nur als Vorbilder für das Nachlegen (in verschiedenen Einfärbungen) dienen, sondern später noch zum Auffinden von Drehpunkten und Spiegelachsen herangezogen werden. Mehrere Kinder müssen sich mit ihren Materialsätzen zusammentun, um ein einigermaßen großes Parkett zu erzeugen.

L-Parkett (46)
Der Baustein ist wie auf der vorhergehenden und der nachfolgenden Karte immer derselbe (T bzw. L bzw. Z). Das daraus gebildete Grundmuster kann aber sehr verschieden sein. Allein mit dem ersten aus zwei L-Plättchen gebildeten Grundmuster (Rechtecksform) können sehr viele verschiedene Parkette gelegt werden.

Z-Parkett (47)
Aus den Z-Bausteinen sind wieder besonders einfache Grundmuster gebildet, damit später leichter Symmetrien festgestellt werden können. Mit dem den Kindern zur Verfügung stehenden Material kann jeweils nur ein Teil der abgebildeten Parkette gelegt werden. Dadurch wird aber umso deutlicher, dass ein Parkett immer weiter fortgesetzt gedacht werden muss.

L- mit T- mit Z-Parkett (48)
Bei Verwendung von zwei oder gar drei Plättchensorten kann man zwar größere Parkette legen, das Gesamtbild wird aber unübersichtlicher und die Struktur, die untersucht werden soll (Symmtrieeigenschaften), ist schwerer zu durchschauen.

Symmetrie von Parketten (49)
Wie bei den Bandornamenten werden jetzt Parkette auf Symmetrie untersucht. Verschiebungssymmetrie ist nach Definition immer vorhanden. Diesbezüglich könnte man nur nach der kürzesten Verschiebung fragen (dem elementaren Verschiebungsvektor): um welche Länge und in welcher Richtung?
1. Man sieht: Drehpunkte müssen nicht auf den Spiegelachsen liegen. Wenn es aber sich kreuzende Spiegelachsen gibt, so liegen auf den Kreuzungspunkten Drehpunkte.

Symmetrie von Parketten (50)
Die Abbildung als Prozess soll sich verinnerlichen; das vollzieht sich über Vorstellungen, und das soll geschult werden. Wenn dabei gelegentlich das Abbild nicht mehr voll auf den sichtbaren Ausschnitt des Parketts fällt, so macht das nur wieder einmal deutlich, dass man sich das Parkett nach allen Richtungen als unendlich ausgedehnt vorstellen muss.

Flächengröße (51)

Die Kinder dürften längst erkannt haben, dass die L-T-Z-Plättchen aus vier gleich großen Quadraten zusammengesetzt gedacht werden können. Ihre Größe entspricht also der eines $2 \cdot 2$-Quadrats. Das sind allerdings nicht 4 cm^2. Darauf gehen wir bald genauer ein. Im Augenblick bietet sich an, zum Flächenvergleich die Winkelplättchen (der Größe 1 WP) heranzuziehen.

Flächenvergleich (52–54)

Die Kinder sollen zunächst einen groben Vergleich nach Augenmaß anstellen.

Ähnliche Figuren (55)

Ähnliche Figuren sind Vergrößerungen bzw. Verkleinerungen voneinander; genauer: Sie gehen durch zentrische Streckung auseinander hervor. Die Flächen vergrößern sich dabei mit dem Quadrat der entsprechenden Strecken, d. h. wie 1, 4, 9, 16, … bei einer Streckenvergrößerung von 1, 2, 3, 4, … Die Kinder brauchen aber nur zu erfahren, dass die Flächengröße stärker zunimmt als die Streckenlänge. Die vergrößerten L-Formen haben also einen Flächeninhalt von 4 WP bzw. 9 WP. Das liefert das Auslegen mit L-Plättchen.

Ähnliche Figuren (56/57)

Es ergeben sich ähnliche Entdeckungen wie auf der vorigen Karte. Allerdings gelingt das Auslegen nicht mit T- bzw. Z-Plättchen, sonderen mit L-Formen. Die Kinder wissen aber, dass deren Flächengrößen gleich sind, nämlich 1 WP.

Ähnliche Figuren (58)

Das beobachtete Phänomen sollte nicht auf Winkelplättchen beschränkt bleiben. Wir starten außerdem mit einer Figur der Größe 2 WP. Wie bisher bei Verdopplung der Seitenlängen, vervierfacht sich auch hier die Flächengröße. Die Kinder kommen also auf 8 WP.

Flächengröße in „Q" (59)

Für die Flächenvergleiche genügte bisher die Anzahl der entsprechenden Winkelplättchen. Als Einheiten (auch im Unterricht vor Einführung der konventionellen cm^2 und dm^2) empfehlen sich Quadrate. Da bieten sich die vier kleinen Teilquadrate der Winkelplättchen an, zumal deren Seitenlänge als Einheiten schon benutzt wurden.

1. Dies ist schon auf Karte 51 klar geworden, nämlich 4 Q bzw. 8 Q bzw. 12 Q.
2. 12 Q bzw. 16 Q bzw. 8 Q.

Umfang in „LE" (60)

1. Durch Auszählen: 10 LE
2. 12 LE bzw. 14 LE
3. Eine Möglichkeit:

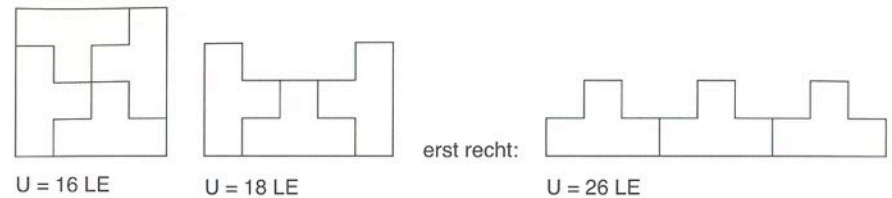

Abb. 34

Flächengröße und Umfang (61/62)

Es geht darum zu erkennen, dass nicht immer zu einer größeren Fläche auch ein größerer Umfang gehört und umgekehrt. Das gilt sehr wohl bei ähnlichen Figuren wie Kreisen und Quadraten untereinander oder bei unseren Vergrößerungen der Winkelplättchen (vgl. Karten 55 bis 58).

Lösungen Karte 61: 14 LE
14 LE – 16 LE
16 LE – 18 LE

Karte 62.1 v. l. n. r.: Jedes Mal 16 LE, dazu 16 Q – 13 Q – 8 Q

Karte 62.2 z. B.:

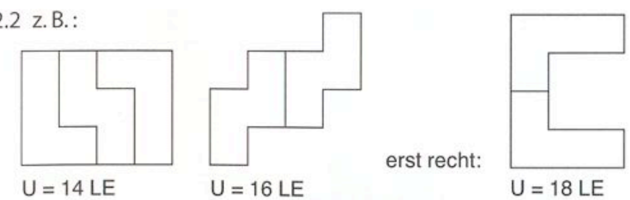

Abb. 35

Die L/T/Z-Plättchen in cm und cm² (63)

Mit den Aufgaben auf dieser Karte soll verhindert werden, dass die Kinder glauben, die Maße LE und Q seien die üblichen konventionellen Einheiten cm und cm^2. Eine angemessene Einführung der dezimalen Maße ist dies andererseits nicht. Das geschieht im Unterricht. Aber die Verbindung dahin soll wenigstens hergestellt werden.

1. L, Tund Z passen auf das Neunerquadrat; denn das überstehende eine Q könnte man in die Lücke legen. Also hat jedes Plättchen die Größe 9 cm^2.

2. Die Kinder brauchen nur ein Viertel eines Zentimeterquadrates in der Vorstellung zu verlagern und einige Halbe zusammenzufügen: 9 cm^2
3. 10 LE entsprechen 15 cm, d. h. 1 LE = 1,5 cm. Es müssen nur einige Halbe zusammengefasst werden.

Ein Legespiel (64)

Ein Spiel, das auch in Konkurrenz von Partnern gespielt werden kann: Wer findet die meisten Muster? Wer findet die meisten symmetrischen? Wer hat die schönste Farbgebung? Im Spiel werden fast alle Aufgaben aus den vorigen Abschnitten wiederholt: Legen, Achsen- und Drehsymmetrie, Ornamente sowie Flächengröße und Umfang.

Außer den hier aufgezeichneten zwölf Möglichkeiten des Auslegens gibt es noch zahllose weitere. Man kann zum Beispiel untere und obere Hälfte bei den Auslegungen noch vielfach kombinieren oder auch die Drittelungen variieren.

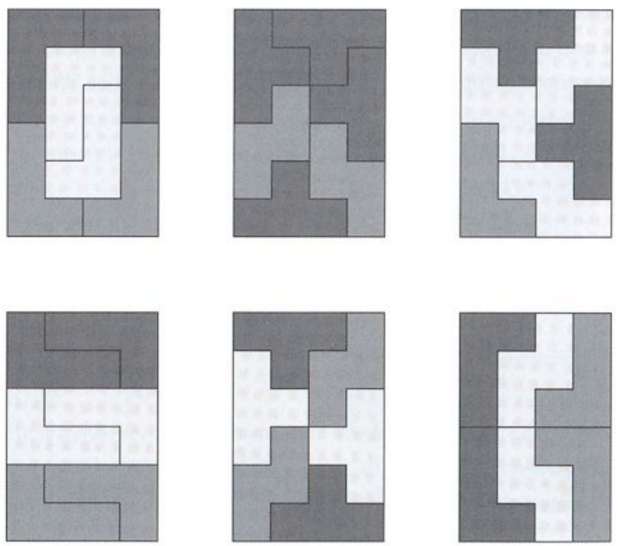

Abb. 36a

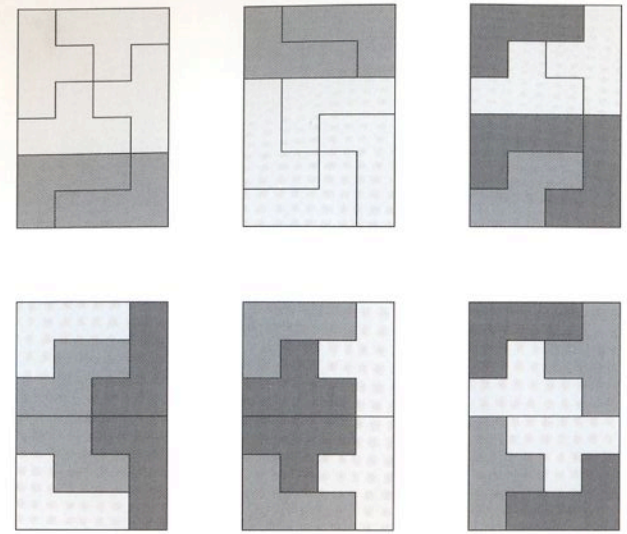

Abb. 36b

Die Antworten:
1. Sechs Plättchen
2. 6 x 4 Q = 24 Q bzw. 6 x 9 cm^2 = 54 cm^2
3. 20 LE bzw. 30 cm.
4. In jedem Fall 20 LE. Denn auf jedes Plättchen entfallen 10 LE, das sind insgeamt 60 LE. Davon liegen 20 auf dem Rand. Von den anderen 40 decken sich immer zwei.
5. Von den hier aufgezeichneten Mustern sind sechs symmetrisch (drei achsen- und drei drehsymmetrisch).
6. In einem Falle nicht; wenn nämlich vier L-Plättchen außen liegen, wie im ersten Beispiel.
7. Mit dieser Frage soll noch einmal auf die ästhetische Komponente bei der Beschäftigung mit den Winkelplättchen hingewiesen werden.